

展望・総説・総論

補助空気室付き空気ばねの特性と設計理論

浅見 敏彦*

1. はじめに

私は以前に空気ダンパの研究をしていた^{1),2)}が、空気ダンパ自身には静的な復元力が発生しないので、別途ばね要素を設置する必要がある。それに対して、補助空気室付き空気ばねは1つの装置でばね特性と減衰特性の両方をもたせることができる利点がある³⁾。その空気ばね本体と補助空気室の連結方法によって、補助空気室付き空気ばねはオリフィス式空気ばねと管路式空気ばねに大別できる(図1と図2)。

現在、空気ばねは、除振台、建築構造物の上下方向免震、鉄道車両の台車、および自動車のサス

ペンションなどに幅広く用いられている^{4),5)}。空気を封入するゴム膜の形によって、空気ばねは提灯形のベローズ形、および内筒と外筒の間をゴム膜でつないだダイヤフラム形にわけられるが、本記事で取り上げる図1と2の空気ばねはダイヤフラム形の一種であるローリングシール形空気ばねである。それは、このローリングシール形空気ばねは他の形式の空気ばねに比べて最も線形性が高いからである。

上部質量を金属ばねではなく空気ばねで支持することは、支えている質量の大きさが変化しても系の固有振動数が変化しにくいという特長がある。それは、空気ばねのばね定数が荷重に比例して変化するという性質をもっているからである。これは、重い荷物が作用するトラックの荷台を支えるのに望ましい性質である。

空気ばねの構造は簡単であるが、その特性を解明することは極めて難しい(おそらく古典的なニュートン力学の領域では十分に解析できないであろう)。それは、空気を封入しているゴム膜の動特性を計算するのに必要な基礎方程式が存在しないからである。空気自身の運動はNavier-Stokes方程式を中心とする支配方程式を数値的に解くことによって理論的に追求することは可能であるが、空気ばねの動特性には必ずゴム膜自身の復元・減衰効果が影響してくる。このことから、最終的には実験に頼らざるを得なくなるという現実がある。そのような限界はあるが、本記事ではこれまでに理論的に解明できたところまでを解説したい。

2. オリフィス式空気ばねの理論解析

図2は、オリフィス式空気ばねで支持された質量 m のおもりとばねで構成される振動系と、その1つの解析モデルを示している。図2(b)では、空気ばねはばね定数 k のばねと減衰係数 c のダッシュボッ

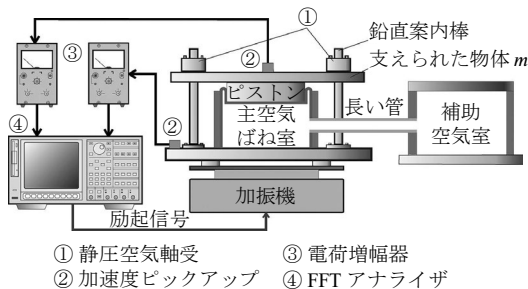
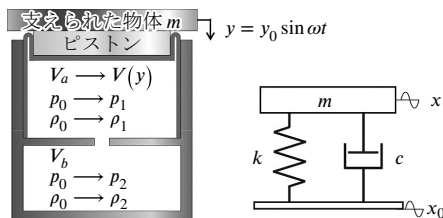


図1 管路式空気ばねの動特性測定法



(a) オリフィス式空気 (b) 空気ばねで支えられた質量 m の物体
ばねで支えられた質量 m の振動系モデル

図2 オリフィス式空気ばねとその解析モデル

* 兵庫県立大学 工学研究科特任教授
(Toshihiko Asami)

トで表現されているが、これらの k と c は定数ではなく、励振振動数 ω と励振振幅 $|x_0|$ によって変化する。このうち、パラメータ k と c が励振振動数によって変化することは、微分方程式が変数係数になるだけであり、線形性は崩れないが、励振振幅によって変化すれば非線形になってしまい、単純な式によってその動特性を計算することができなくなってしまう。以下、反復計算によってパラメータ k と c を計算する手順を紹介する⁶⁾。

計算を簡単にするために、図 2 (a) のように空気ばねの基礎は静止し、上部は変位入力 x_0 と絶対変位応答 x の相対値 $y = y_0 \sin \omega t$ で単調和運動をする と仮定する。また、初期状態において、空気ばね室の内容積は V_a 、補助空気室の内容積 (一定) は V_b 、ばね室と補助空気室に含まれている空気の圧力と密度をそれぞれ p_0 と ρ_0 とおく。振動が始まると、空気ばね室の内容積は V に、空気の圧力と密度はそれぞれ p_1 と ρ_1 に変化し、補助空気室の空気の圧力と密度は p_2 と ρ_2 に変化すると考える。このとき、2 つの空気室内の空気の状態方程式

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\kappa, \quad \frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^\kappa \quad (1)$$

連続の式

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(V_a - A_f y) + \int_0^t Q_m dt &= \rho_0 V_a \\ \rho_2 V_b - \int_0^t Q_m dt &= \rho_0 V_b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

およびオリフィス前後の圧力差 (ベルヌーイの式) が

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_0 v_{or}^2 \quad (3)$$

と表される。この時点で、式 (3) に示された速度と圧力の関係が非線形であることから、このオリフィス式空気ばねは基本的に非線形特性を有することがわかる。なお、式 (1) も非線形方程式であるが、圧力変化が微小であると考えれば、線形化することは可能である。

ここで、式 (1) はそれぞれの空気室内の空気の状態変化を断熱変化と仮定して導かれた式であり、 κ は空気の比熱比で、室温では 1.4 である。連続の式の右辺は最初にそれぞれの空気室に含まれて

いた空気的全質量を、左辺は時刻 t 経過後の質量を表す。 Q_m はオリフィスを通る単位時間当たりの空気の質量流量、 A_f はピストンの受圧面積を表し、 v_{or} はオリフィスを通る空気の平均流速であり、 ρ_0 はそのときの空気密度である。この質量流量 Q_m は次のように計算できる。

$$Q_m = \rho_0 C_{or} A_{or} v_{or} = \text{sgn}(p_1 - p_2) C_{or} A_{or} \sqrt{2\rho_0 |p_1 - p_2|} \quad (4)$$

ここで、 A_{or} はオリフィス面積、 C_{or} はオリフィス流入時の縮流を表す流量係数で、この係数は実験的に測定されるべきものである。

これらの式で用いられている記号は有次元であるが、これらを次のように無次元化する。まず圧力と時間については

$$P_1 = \frac{p_1 - p_0}{p_0}, \quad P_2 = \frac{p_2 - p_0}{p_0}, \quad T = \frac{\omega t}{2\pi} \quad (5)$$

次に、ピストンの変位と振幅、および 2 つの空気室の容量比については

$$Y = \frac{y}{h_a}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{h_a}, \quad R_a = \frac{A_f h_a}{V_a}, \quad R_b = \frac{A_f h_a}{V_b} \quad (6)$$

ここで h_a は主空気ばね室におけるピストン底面からオリフィスまでの距離を表す。

さて、式 (2) に含まれる 2 つの式は積分方程式であるが、これらの式の両辺を時間 t で微分する。その式に式 (1) と (3) を代入し、記号を式 (4) と (5) で定義された無次元パラメータに変換すると、次の連立微分方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{R_a} (1 + P_1)^{(1/\kappa)-1} (1 - R_a Y) \frac{dP_1}{dT} \\ &\quad + \frac{2\pi}{N_0} \text{sgn}(P_1 - P_2) \sqrt{|P_1 - P_2|} \\ &= \kappa (1 + P_1)^{1/\kappa} \frac{dY}{dT} \\ &\frac{1}{R_b} (1 + P_2)^{(1/\kappa)-1} \frac{dP_2}{dT} \\ &\quad - \frac{2\pi}{N_0} \text{sgn}(P_1 - P_2) \sqrt{|P_1 - P_2|} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中の N_0 は無次元化された振動数とよぶべきパラメータであり、下記のように定義される。

$$N_0 = \frac{\omega A_f h_a}{\kappa C_{or} A_{or}} \sqrt{\frac{\rho_0}{2p_0}} \quad (8)$$

次に、微小振動を仮定して式 (7) を簡単化すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_a} \frac{dP_1}{dT} + \frac{2\pi}{N} (P_1 - P_2) &= \kappa \frac{dY}{dT} \\ \frac{1}{R_b} \frac{dP_2}{dT} - \frac{2\pi}{N} (P_1 - P_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (7) を式 (9) に変形する際に次の近似をおこなっている。

$$\text{sgn}(P_1 - P_2) \sqrt{|P_1 - P_2|} \simeq b_1 \sqrt{P_a} \sin \tau \quad (10)$$

ここで、 P_a は圧力差 $P_1 - P_2$ を正弦振動で置き換えたときの振幅を表し、無次元パラメータ N は以下のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{N_0 \sqrt{P_a}}{b_1} \\ b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \tau \sqrt{|\sin \tau|} d\tau = 1.113 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

連立微分方程式 (9) は、パラメータ N がピストンの振動振幅と振動数によって値が変化することから非線形方程式であるが、ここでは N を定数とみなして式 (9) を代数的に解くと、以下の解が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\kappa R_a Y_0}{(R_a + R_b)^2 + N^2} \\ &\quad \times \left\{ [R_b(R_a + R_b) + N^2] \sin 2\pi T \right. \\ &\quad \left. + N R_a \cos 2\pi T \right\} \\ P_2 &= \frac{\kappa R_a R_b Y_0}{(R_a + R_b)^2 + N^2} \\ &\quad \times [(R_a + R_b) \sin 2\pi T - N \cos 2\pi T] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ピストンは変位 $y = y_0 \sin \omega t$ で振動していることから、空気ばねのばね定数 k と減衰係数 c は以下のようにして計算できる。

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{2p_0 A_f}{h_a Y_0} \int_0^1 P_1 \sin 2\pi T dT \\ c &= \frac{2p_0 A_f}{\omega h_a Y_0} \int_0^1 P_1 \cos 2\pi T dT \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式 (13) の P_1 に式 (12) を代入して積分を実行す

ると

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\kappa p_0 A_f R_a}{h_a} \frac{R_b(R_a + R_b) + N^2}{(R_a + R_b)^2 + N^2} \\ c &= \frac{\kappa p_0 A_f}{\omega h_a} \frac{N R_a^2}{(R_a + R_b)^2 + N^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

こうしてオリフィス式空気ばねのばね定数 k と減衰係数 c の計算式が導かれたが、これらの式を使っておこなう計算は単純ではない。それは、式の中に含まれている記号 N の値は、ピストンの無次元振動振幅 Y_0 によって変化するためである。式 (11) で定義された N に含まれるパラメータ P_a は以下のようにして計算される。

$$\left. \begin{aligned} P_a &\doteq |P_1 - P_2| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{b_1(R_a + R_b)}{N_0} \right]^4 + (2\kappa R_a Y_0)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{b_1(R_a + R_b)}{N_0} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

こうして、空気ばねの k と c の計算には以下の収束計算が要求される。

- (1) 最初に適当なピストン振幅 y_0 の値を仮定し、式 (15) と (11) によって計算された N の値から、空気ばねの k と c の初期値を求める。
- (2) 図 2 (b) のモデルに上記の k と c の値を代入して、上部質量の応答 x を計算する。
- (3) $y_0 = |x - x_0|$ より、 y_0 の値を更新する。
- (4) 更新された y_0 の値から新たに k と c の値を計算し、計算が収束するまで上記の (2) と (3) を繰り返す。

このような収束計算は、オリフィス式空気ばねがもつ非線形特性の性質上、避けて通れないであろう。

ところで、実際には非線形の連立微分方程式 (9) を線形方程式とみなして解いたことにより、計算誤差が生じているはずである。よって、2 つの非線形連立方程式 (7) と (9) を Runge-Kutta 法によって解いた結果を線形近似解 (12) と比較した。その結果、式 (9) の数値解と近似解 (12) の差はわずかであり、それよりも式 (7) から (9) への近

似の方が誤差が大きいことが判明した．式 (7) の数値解と近似解 (12) の差はピストン振幅が大きくなるほど増加するが， $Y_0 = 0.5$ 以下であれば，その誤差は無視できるほど小さい．

3. オリフィス式空気ばねの実験装置

図 3 は，オリフィス式空気ばねの実験装置を示している．空気ばねは一般に水平方向運動に対しては復元力がほとんど働かず，この実験装置も横

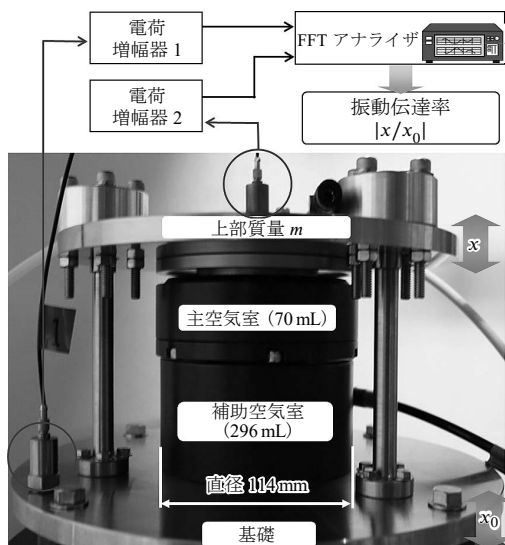


図 3 オリフィス式空気ばねの実験装置

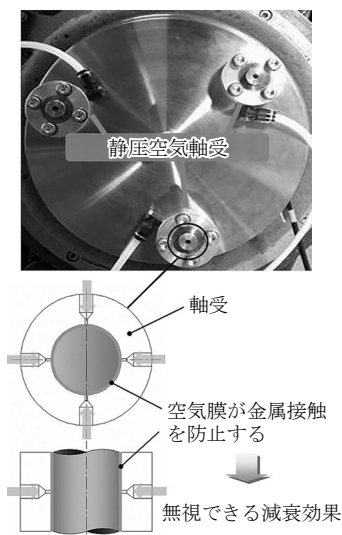


図 4 空気ばね実験装置の俯瞰図

揺れを防止するために，3 本の鉛直案内棒が空気ばねの周辺に取付けられている．これらの案内棒と上部質量が直接接しないように，案内棒とガイド孔の間には静圧空気軸受が挿入されている．その構造を図 4 に示している．この空気軸受にはコンプレッサーから高圧の空気が図中の白いチューブを通して供給される．

空気ばねの減衰係数とばね定数の実験値にはゴム膜の動特性が影響を与える．ゴムのような高分子材料については，それに働く力と運動の関係を表す式が存在しないため，ゴム膜自身の減衰係数とばね定数については実験に頼らざるを得ない．

図 5 は，図 3 に示されたオリフィス式空気ばねの断面図を示している．空気ばね室の天井部に設置されたゴム膜の動特性を測定するために，図中のオリフィス孔を塞いで実験をおこなった．このとき理論上は空気流動による減衰効果はゼロになるはずであるが，実際には図 6 に示すような減衰が測定された．この減衰は主にゴム材料の内部減衰，およびゴム膜と金属面との間の摩擦によって生じると考えられる．ピストンの振幅 X_0 を変え

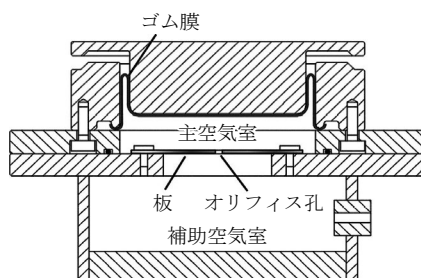


図 5 オリフィス式空気ばねの断面図

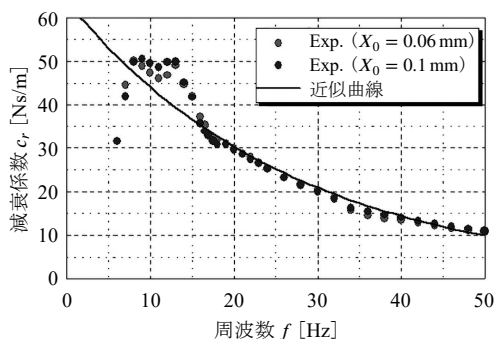


図 6 オリフィスなしの空気ばねの減衰係数

でも実験値はほとんど変化しなかったで、ゴム膜の減衰係数は周波数のみによって変化すると考え、その近似計算式を式 (16) の第 1 式で与えた。図 6 における黒の曲線はこの近似式を図示したものである。

$$\left. \begin{aligned} c_r &= 63.7 \exp(-0.037f); \\ c_r: \text{Ns/m}, \quad f: \text{Hz} \\ k_r &= 7.52 \exp(-1.705y_a); \\ k_r: \text{kN/m}, \quad y_a: \text{mm} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

次に、オリフィス板を取り除いて空気ばねのばね定数を測定すると、図 7 (a) の結果が得られた。このときの空気ばねのばね定数 k は

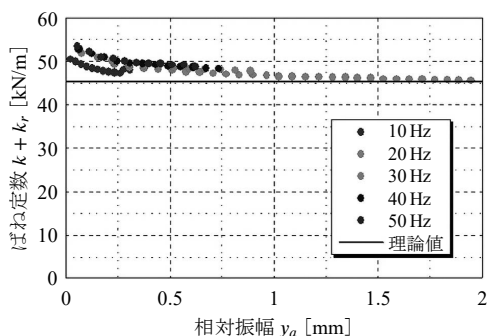
$$k = \frac{\kappa A_f^2 p_0}{V_a + V_b} \quad (17)$$

で計算できるので、その計算値が黒線で表示されている。実験値と計算値は相対振幅 y_a が大きいときには一致するが、振幅が小さくなるに従って実験値の方が大きくなる。両者の違いは、ゴム膜自

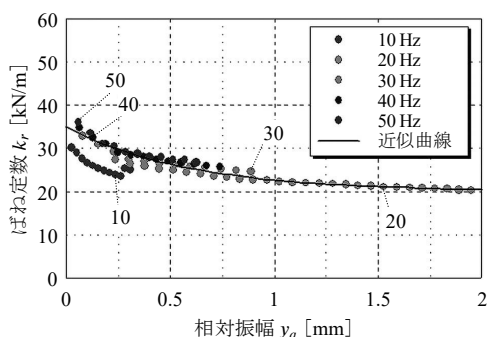
身の弾性変形によって生じる復元力の影響と考えられる。

図 7 (b) は、同図 (a) の実験値から計算値を減算した結果を示しているが、これはゴム膜自身のばね定数を表していると考えてよい。その実験値は、多少の誤差はあるものの、振動の周波数によってはほとんど変化が現れない。したがってゴム膜のばね定数 k_r は振動振幅 y_a のみの関数と考え、式 (16) の第 2 式のような近似計算式を与えた。この近似計算値を図 6 (b) において黒の曲線に表示している。この図に示されるように、ゴム膜のばね定数には振幅依存性があり、これが空気ばねの動特性に非線形性を与えている。

オリフィス式空気ばねにおいて、もう 1 つ測定しておかなければならない実験定数がある。それは、式 (8) の無次元パラメータ N_0 に含まれている流量係数の C_{or} である。これは図 8 に示されるように、オリフィスに流入する空気の流路面積が実際のオリフィス面積よりも狭くなることによって生じる補正係数である。



(a) 空気ばねのばね定数の理論値との比較



(b) ゴム膜のみのばね定数

図 7 オリフィスなしの空気ばねのばね定数

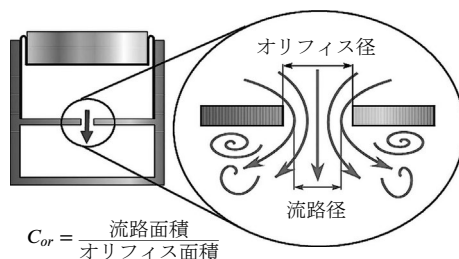


図 8 空気がオリフィスを流れるときの縮流

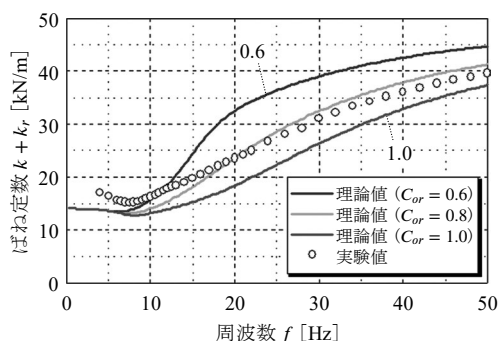
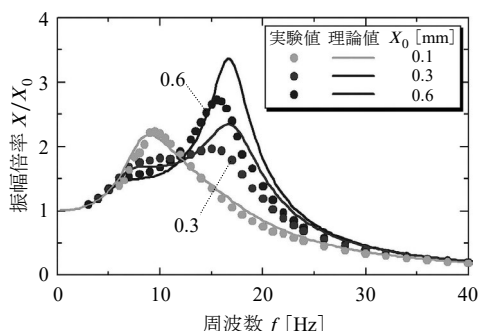


図 9 さまざまな流量係数に対する空気ばねのばね定数の計算値と実験値 ($d_{or} = 2.0 \text{ mm}$, $X_0 = 0.3 \text{ mm}$)

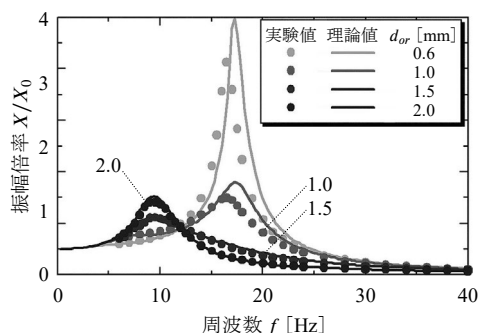
流量係数の値は、空気ばね実験装置のばね定数の計算値と実験値を比較することによって決定した。図 9 は流量係数を 3 種類に変化させて計算した空気ばね実験装置のばね定数を、実験値と比較した結果を示している。この図から、この実験装置におけるオリフィスの流量係数を $C_{or} = 0.8$ と決定した。

4. オリフィス式空気ばね支持系の周波数特性

図 10 はオリフィス式空気ばねで支持された質量 4kg のおもりの周波数特性を示している。図 10 (a) はオリフィス径を $d_{or} = 1.5\text{mm}$ に固定し、基礎への入力振幅 X_0 を 0.1 から 0.6mm までの 3 通りに変化させた場合を示し、同図 (b) は基礎への入力振幅を 0.1mm に固定し、オリフィス径を 0.6 から 2.0mm までの 4 通りに変化させた場合を示している。図中の実線は理論曲線であり、実験値、理



(a) さまざまな入力振幅に対する周波数応答 ($d_{or} = 1.5\text{ mm}$)



(b) さまざまなオリフィス径に対する周波数応答 ($X_0 = 0.1\text{ mm}$)

図 10 空気ばねで支持された系の周波数応答

論値共に $f = 12\text{Hz}$ 付近に定点が存在していることがわかる。理論値は実験値と多少ずれているところはあるが、全体としてよく予想できていると評価できる。

従来から空気ばねのオリフィス径を変えたときに、周波数応答には定点が存在することはよく知られていたが、今回の計算と実験において、振動系への入力振幅を変化させたときにも同様の定点が存在することは、著者の研究において初めて明らかにされたことである。このように、すべての周波数応答曲線が 1 つの定点を通過することから、空気ばね支持系の最も望ましい支持条件は、この定点で曲線が極大値をとるようにオリフィス径の大きさを調整することであるといえる。ただし、その最適支持条件は入力の影響を受けてしまうので、精密な調整は難しい。

この後に解説される管路式空気ばねとの大きな違いは、オリフィス式空気ばね支持系の周波数応答には共振点が 1 つしか存在しないことである。それは、この方式の空気ばねの利点であるといえるが、一方で、基本性能が非線形であることから、入力振幅の大きさの影響をまともに受けてしまい、最適化に対する精密な微調整が難しいという欠点もある。

5. 管路式空気ばね支持系の特徴

オリフィス式空気ばねでは空気ばね室の直下に補助空気室が配置されることから、空気ばね自身の背が高くなるという問題がある。したがって、除振テーブル全体を新規に設計する場合には、テーブル脚の中を補助空気室として使用することで、テーブルの上板を薄く設計できるが、既存のテーブル上に後から除振台を据え付ける場合にはこの構造は適さない。このようなときには、図 11 に

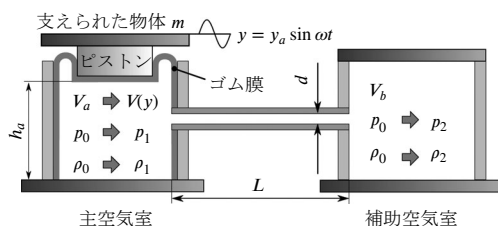


図 11 各空気室における空気の圧力と密度変化

示すような構造の管路式空気ばねが使われる。

この管路式空気ばねは基礎方程式が線形近似できることから最適設計が容易になるが、質量が1つであるのに共振点が2つ現れるという問題が生じる。この現象がなぜ起こるのかということは長い間不明であったが、著者らの研究によって、第2共振はヘルムホルツ共鳴であることが解明された⁷⁾。

6. 管路式空気ばねの理論解析

オリフィス式空気ばねにおいて、理論解析における基礎式は式(1)から(3)に挙げられた5つの式である。一方、管路式空気ばねの理論解析では、式(1)と(2)はそのまま使うことができ、式(3)の代わりに以下の空気の管路内運動方程式を用いることにした。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (18)$$

この運動方程式は、長さ L 、内半径 $R = d/2$ の細い円管内における非圧縮性流体の層流流れの式である (r は円管中心からの半径方向距離、 v は軸方向流速)。空気は圧縮性流体であるが、本理論解析では、管路内では密度が ρ_0 で一定の非圧縮性流体とみなしている。このような近似をすると、管路式空気ばねの基礎方程式は線形方程式になり、オリフィス式空気ばねの場合と同様にして連立微分方程式を解くことによって次の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{p_0 A_f}{h_a} \frac{R_a \kappa}{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_2}{\kappa} + D_2 \right) \\ c &= \frac{p_0 A_f}{\omega h_a} \frac{R_a \kappa}{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\kappa} - D_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

今度は線形方程式の解であることから式(19)には振動振幅の項は含まれていないが、振動数変化の影響は受ける。具体的には、式中の記号、 C_1 、 C_2 、 D_1 、および D_2 は無次元振動数 $\eta_R = R\sqrt{\omega/\nu}$ の Bessel 関数によって次のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= B'_1(N_1 + N_2) \\ C_2 &= \frac{1}{\kappa} - (B'_2 + 1)(N_1 + N_2) \\ N_1 &= \frac{1}{V_a} \frac{p_0 A_t}{L \rho_0 \omega^2} \\ N_2 &= \frac{1}{V_b} \frac{p_0 A_t}{L \rho_0 \omega^2} \\ A_t &= \pi R^2 \\ D_1 &= N_2 [B'_1 C_2 + (B'_2 + 1) C_1] \\ D_2 &= N_2 [B'_1 C_1 - (B'_2 + 1) C_2] \\ B'_1 &= \frac{2}{\eta_R} \frac{\text{ber } \eta_R \text{ber}' \eta_R + \text{bei } \eta_R \text{bei}' \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \\ B'_2 &= \frac{2}{\eta_R} \frac{\text{ber } \eta_R \text{ber}' \eta_R + \text{bei } \eta_R \text{bei}' \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで B'_1 と B'_2 は、以下で定義されたパラメータ B_1 と B_2 の $\eta = r\sqrt{\omega/\nu}$ に関する導関数に対して $\eta = \eta_R$ と置いた式である。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\text{ber } \eta \text{ber } \eta_R + \text{bei } \eta \text{bei } \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \\ B_2 &= \frac{\text{ber } \eta \text{ber } \eta_R + \text{bei } \eta \text{bei } \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これらの定義式において現れる関数 ber と bei および ber' と bei' は、Bessel 関数の1つである第一種ケルビン関数とその導関数である。

次に、振動系はみかけ上は1質点系であるにもかかわらず、2つの共振点が発生する理由をここ

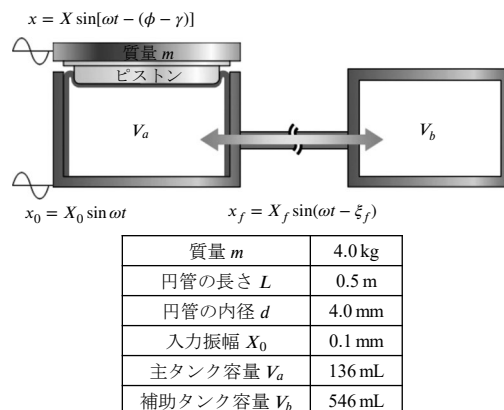


図12 管路式空気ばね支持系の計算モデルと諸元

で示しておく．図 12 は，この空気ばねで支持された質量 m のおもりで構成される振動系を示している．この振動系の基礎に振幅 $X_0 = 0.1\text{mm}$ の正弦波変位が作用するとき，上部質量の変位振幅 X と管路内の空気の変位振幅 X_f ，およびそれらの位相遅れ $\phi - \gamma$ および ξ_f を計算する．この計算に使われた数値が図 12 に示されている．

図 13 (a) と (b) はこの振動系の 2 つの振幅応答倍率と位相遅れを示している．これらの図において，黒線と青線はそれぞれ上部質量と管内空気の振幅倍率と位相遅れを表している．この振動系の周波数応答には確かに 2 つの共振点が現れているが，詳しく調べてみると，8Hz 付近において現れる 1 次共振点では，上部質量と管内空気の入力に対する位相遅れはどちらも 90° となっていることがわかる．このことは，図 12 において，上部質量 m が上に動くときに管内空気は右方向に移動することを意味する．それに対して，26Hz 付近に現れる 2 次共振では，上部質量の位相遅れが 90° であるのに対して，管内空気の位相遅れは 270° となっている．このことは，質量 m が上向きに運動するときには，管内空気は左方向に移動することを意味する．

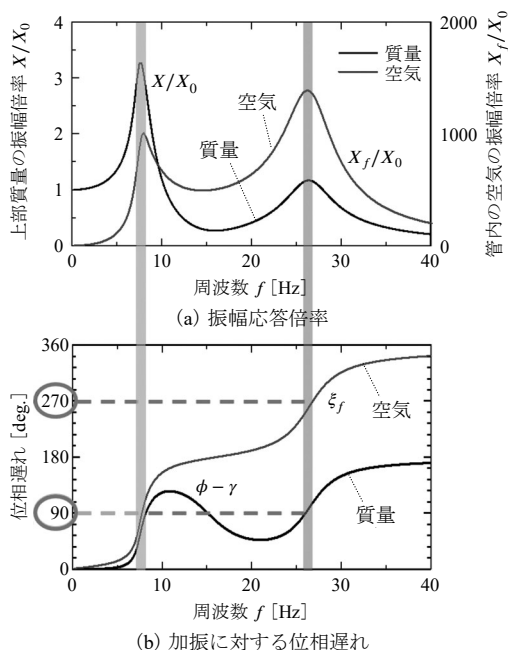


図 13 管路式空気ばね支持系の周波数応答の計算例

すなわち，管路式空気ばね支持系は，上部質量と管内空気質量の 2 質点系を構成していることになる．ところが，この計算に使われた数値では，上部質量は 4kg であるのに対して，管内の空気質量は 8mg と約 500000 分の 1 の大きさでしかない．これだけ小さな空気質量が 2 次共振を発生させる理由は次のように説明できる．まず，2 次共振点では上部質量の振幅倍率 X/X_0 は 1.16 であるのに対して，管内空気の振幅倍率は X_f/X_0 は 1400 となっており，管内空気の加速度はピストン加速度の 1200 倍となっていることがわかる．このことから，空気の等価質量は実質量の 1200 倍の 9.6g になる．次に，この空気の加速によって生み出された力は，パスカルの原理によって，ピストンと細管の断面積比の 360 倍になって上部質量に伝えられる．これは実質的に 3.0kg の質量によって生み出される力と等価であるといえる．このような共振現象のことをヘルムホルツ共鳴という．

7. 管路式空気ばねの実験装置

図 14 は管路式空気ばねの実験装置を示している．この実験では，細管の内径を 2 通り，細管長さを 4 通り，補助空気室の容量を 3 通り，加振振幅を 4 通りに変化させた．具体的な数値は図の下に示されている．

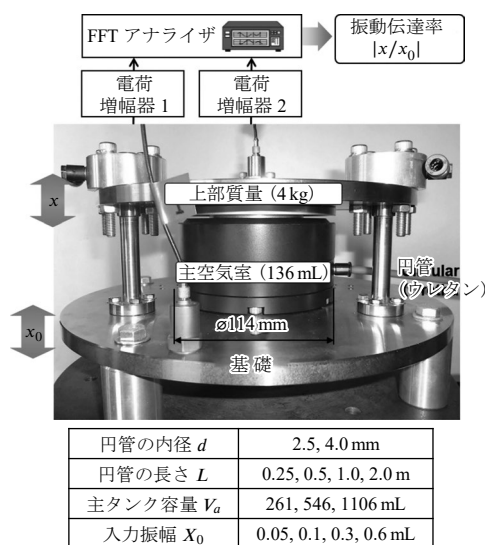
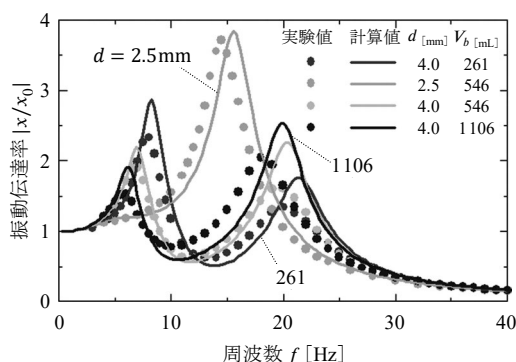


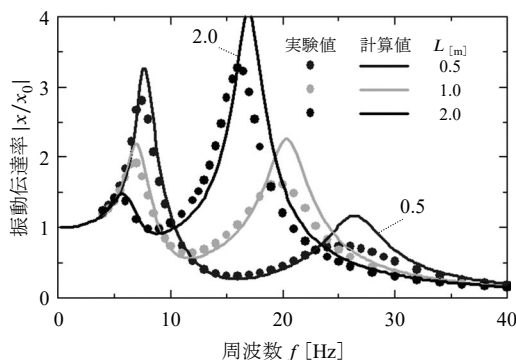
図 14 管路式空気ばねの実験装置

図 15 は、図 14 に示された実験装置の基礎に振幅 $|x_0| = X_0 = 0.1\text{mm}$ の正弦波変位が与えられたときの 振動伝達率の実験値と計算値を示している。同図 (a) は円管の内径と補助タンク容量を変えた場合、(b) は円管の長さを変えた場合の変化を表している。図 15 (a) から、円管が細い (2.5mm) 場合には共振点は 1 つしか現れないことがわかる。円管を太く (4.0mm) した場合には 2 つの共振点が現れるが、補助空気室の容量 V_b を大きくしていくに従って、第 1 共振点が低くなり、代わりに第 2 共振点が高くなっていく。図 15 (b) に示されるように、円管を長くしていった場合にも、第 1 共振点は低くなり第 2 共振点が高くなっていく。同時に 2 つの共振振動数は低くなっていくが、第 2 共振点の方が減少の仕方が著しい。実験値と計算値を比較すると、両者はほぼ一致しているといえる。

管路式空気ばねは線形性が高いということを第



(a) 円管の径と補助タンク容量を変えた場合

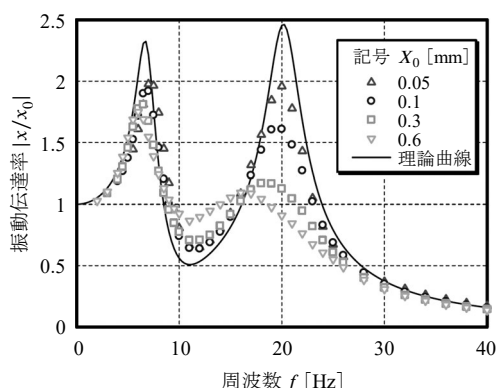


(b) 円管の長さを変えた場合

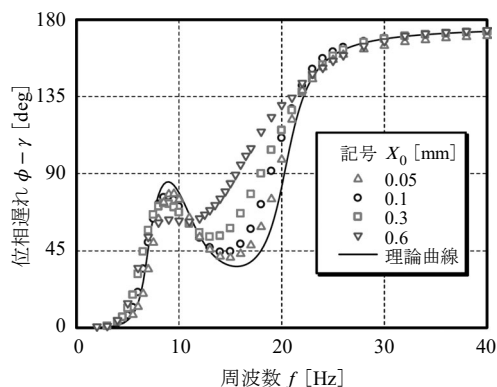
図 15 空気ばね支持系の振動伝達率 ($X_0 = 0.1\text{mm}$)

5 章で述べていたが、実は、このばねにも明確な非線形特性が現れる。図 15 の実験では加振振幅が 0.1mm という微小な値であったが、加振振幅を 0.05 から 0.6mm まで 4 通りに変化させたときの影響を図 16 に示している。このときの実験・計算条件は、管路径 4.0mm、管路長 1.0m、補助空気室容積 546mL で、他は図 14 に示されている。この図から、振動振幅が大きくなるに従って実験値は理論曲線から離れていく。理論曲線は加振振幅がゼロに近づいた極限の値を示しているといえる。

最後に、図 17 は管路式空気ばねのばね定数と減衰係数の理論値と実験値を比較した図である。この図の実験値に示された管路式空気ばねの振幅依存性は、管路内流れが式 (18) の線形運動方程式では正確には表現できないことを意味する⁸⁾。



(a) 入力に対する上部質量の振幅応答倍率



(b) 入力に対する上部質量の位相遅れ

図 16 管路式空気ばね支持系の振幅依存性

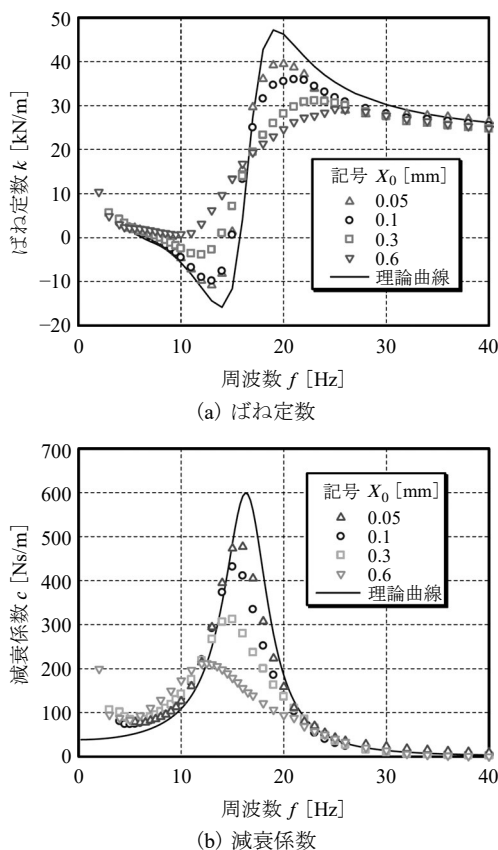


図 17 管路式空気ばねのばね定数と減衰係数

8. おわりに

補助空気室付き空気ばねの動特性を理論的に解明することは極めて難しく、現在でも計算値と実験値との間にはまだ埋められない差が残されている。現時点で解明できたことを整理すると以下のようなになる。

- (1) オリフィス式空気ばねは基本的に非線形性を有しており、そのばね定数と減衰係数の計算式には振動振幅の値を入力することが要求される。そのため、収束計算をすることが必要になる。

- (2) 管路式空気ばね支持系では、みかけ上は 1 自由度振動系であるにもかかわらず、2 つの共振点が見ることがある。この第 2 共振点は細管内の空気が加速度運動をすることによって発生する。
- (3) 管路式空気ばねのばね定数と減衰係数の近似計算式（微小振幅を仮定して得られた計算式）は、入力された振動数の値によって変化するが、振動振幅の影響は受けない。
- (4) 管路式空気ばねへの入力振幅が増加すると、そのばね定数と減衰係数の値が変化していくことが確認された。現時点では、この変化を正確に計算することはできない。

参考文献

- 1) 浅見敏彦：「空気ダンパとその応用 (1)」, 機械の研究, 43, 6 (1991) pp.49-55.
- 2) 浅見敏彦：「空気ダンパとその応用 (2)」, 機械の研究, 43, 7 (1991) pp.45-50.
- 3) J.H. Lee and K.J. Kim : "Modeling of Nonlinear Complex Stiffness of Dual-Chamber Pneumatic Spring for Precision Vibration Isolations", Journal of Sound and Vibration, 301, 3-5 (2007) pp.909-926.
- 4) H. Liu, D. Zhuang, Y. Lin, W. Wang, F. Zhang, W. Zhang and F. Liu : "A Study on Nonlinear Stiffness Characteristics of Air Spring for a Bus", SAE Transactions (2002) pp.717-722.
- 5) N. Docquier, P. Fisette and H. Jeanmart : "Multiphysic Modelling of Railway Vehicles Equipped With Pneumatic Suspensions", Vehicle System Dynamics, 45, 6 (2007) pp.505-524.
- 6) T. Asami, Y. Yokota, T. Ise, I. Honda and H. Sakamoto : "Theoretical and Experimental Analysis of the Nonlinear Characteristics of an Air Spring With an Orifice", ASME Journal of Vibration and Acoustics, 135, 1 (2013) p.011012.
- 7) T. Asami, Y. Yokota, T. Ise, I. Honda, and H. Sakamoto : "An Approximate Formula to Calculate the Restoring and Damping Forces of an Air Spring With a Small Pipe", ASME Journal of Vibration and Acoustics, 135, 5 (2013) p.051029.
- 8) 田寺正敏・浅見敏彦・本田逸郎・伊勢智彦：「二つの空気室を長い管で接続した空気ばねの数値解析（円管の内部に存在するオリフィスの影響）」, ばね論文集, 62, (2017) pp.19-26.