系の運動エネルギー T を計算すれば、次式となる。

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{1}{2}\,m_1\,(\dot{x}_{m1}^2 + \dot{y}_{m1}^2) + \frac{1}{2}\,m_2\,(\dot{x}_{m2}^2 + \dot{y}_{m2}^2) \\
=& \frac{1}{2}\,m_1\,(l_1^2\cos^2\theta \times \dot{\theta}^2 + l_1^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2) \\
& + \frac{1}{2}\,m_2\,(l_2^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{u}^2\sin^2\theta + u^2\cos^2\theta\,\dot{\theta} \\
& + 2\,l_2\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{u}\sin\theta + 2\,\dot{u}\sin\theta\,u\cos\theta\,\dot{\theta} + 2\,u\cos\theta\,\dot{\theta}\,l_2\cos\theta\,\dot{\theta} \\
& + l_2^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{u}^2\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 \\
& - 2\,l_2\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{u}\cos\theta - 2\,\dot{u}\cos\theta\,u\sin\theta\,\dot{\theta} + 2\,u\sin\theta\,\dot{\theta}\,l_2\sin\theta\,\dot{\theta} \\
=& \frac{1}{2}\,m_1 l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,(l_2^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + l_2^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{u}^2\sin^2\theta + \dot{u}^2\cos^2\theta \\
& + u^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + u^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2\,l_2 u\cos^2\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\theta} + 2\,l_2 u\sin^2\theta\,\dot{\theta}) \\
=& \frac{1}{2}\,m_1 l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,(l_2^2\dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 + u^2\dot{\theta}^2 + 2\,l_2 u\dot{\theta}^2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

次に、系のポテンシャルエネルギーを計算する。ばねのもっている位置のエネルギー U_1 は次式となる。

$$
U_1 = \frac{1}{2}\,ku^2 \tag{8}
$$

質点 m_1 は静止していた位置 $\theta = 0$ からの上昇量は $l_1 - l_1\cos\theta$ となる。質点 m_2 は静止していた位置 $\theta = 0$ からの上昇量は $l_2 - (l_2 + u)\cos\theta$ となる。すなわち、質点 m_1 と質点 m_2 のもっている位置のエネルギー U_2 は次式となる。

$$
U_2 = m_1 g l_1(1 - \cos\theta) + m_2 g(l_2 + u)(1 - \cos\theta) \tag{9}
$$

ゆえに、系のポテンシャルエネルギー U は次式となる。

$$
U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\,ku^2 + m_1 g l_1(1 - \cos\theta) + m_2 g(l_2 + u)(1 - \cos\theta) \tag{10}
$$

式 (7) と式 (10) からラグランジアン L は次式となる。

$$
\begin{aligned}
L =& T - U \\
=& \frac{1}{2}\,m_1 l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,(l_2^2\dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 + u^2\dot{\theta}^2 + 2\,l_2 u\,\dot{\theta}^2) \\
& - \frac{1}{2}\,ku^2 - m_1 g\,l_1(1 - \cos\theta) - m_2 g(l_2 + u)(1 - \cos\theta)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(2)　ラグランジアンを L とすれば、ラグランジュの運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=f_q \tag{12}$$

ここで、

$$L=T-U \tag{13}$$

F は散逸関数であり、系の粘性係数が c であるので、次式で与えられる。

$$F=\frac{1}{2}\,c\,\dot{u}^2 \tag{14}$$

さらに、q は座標、f_q は座標方向の外力、あるいは外モーメントである。
式 (12) を適用するため、以下の式を計算しておく。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}&=m_1 l_1^2\dot{\theta}+m_2\left(l_2^2+u^2+2\,l_2 u\right)\dot{\theta}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}&=m_1 l_1^2\ddot{\theta}+m_2\left(2\,u\dot{u}+2\,l_2\dot{u}\right)\dot{\theta}+m_2\left(l_2^2+u^2+2\,l_2 u\right)\ddot{\theta}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\,F=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-m_1 g l_1\sin\theta-m_2 g\left(l_2+u\right)\sin\theta \tag{17}$$

θ 方向に働く外力は存在しないので

$$f_\theta=0 \tag{18}$$

ゆえに θ 方向の運動方程式は次式となる。

$$\left[m_1 l_1^2+m_2(l_2+u)^2\right]\ddot{\theta}+2\,m_2(u+l_2)\,\dot{u}\dot{\theta}+\left[m_1 g\,l_1+m_2 g\,(l_2+u)\right]\sin\theta=0 \tag{19}$$

次に、u 方向の運動方程式を求めるために、次式を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}=m_2\dot{u},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)=m_2\ddot{u} \tag{20}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}=c\dot{u} \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = m_2\,(u + l_2)\,\dot{\theta}^2 - k\,u + m_2 g(1 - \cos\theta) \tag{22}$$

u 方向の外力は

$$f_u = 0 \tag{23}$$

になるので、次の運動方程式を得る。

$$m_2\ddot{u} + c\dot{u} + k\,u - m_2\,(u + l_2)\,\dot{\theta}^2 + m_2 g(1 - \cos\theta) = 0 \tag{24}$$

注意　問題（3）（4）について：式 (25) と式 (26) は連立微分方程式である。断定はできないが、ラプラス変換を適用して解析的に解くことも難しいと、現時点では判断している。問題（3）と問題（4）は、この種の問題に対して、受験生はどのような解答を与えるかを問う問題であると考えられる。筆者が与えた問題（3）と問題（4）の解答は解答例である。微小振動を無理に仮定して解いても正解になる可能性があるだろう。

(3)　θ 方向の角運動方程式である式 (19) と並進の運動方程式 (24) を再記して、それぞれ式 (25)、式 (26) とする。

$$[m_1 l_1^2 + m_2(l_2 + u)^2]\,\ddot{\theta} + 2\,m_2(u + l_2)\,\dot{u}\,\dot{\theta} + [m_1 g\,l_1 + m_2 g\,(l_2 + u)]\sin\theta = 0 \tag{25}$$

$$m_2\ddot{u} + c\dot{u} + k\,u - m_2(u + l_2)\,\dot{\theta}^2 + m_2 g(1 - \cos\theta) = 0 \tag{26}$$

運動方程式 (25) と式 (26) は、やや複雑な連立微分方程式になっている。このような連立微分方程式は、差分法を用いて数値的に解ける。しかし、試験問題となっているので、数値計算の実行は不可となる。

図 1 に示すように、質量 m' の物体（質点）がばね定数 k' のばねと粘性減衰係数 c' のダッシュポットを介して剛性天井に連結されている系を考える。

この場合の系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} m'\ddot{z} + c'\dot{z} + k'z &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{c'}{m'}\,\dot{z} + \frac{k'}{m'}\,z &= 0, \\ \ddot{z} + 2\,\frac{c'}{2m'}\,\dot{z} + \sqrt{\frac{k'}{m'}}^{2}\,z &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

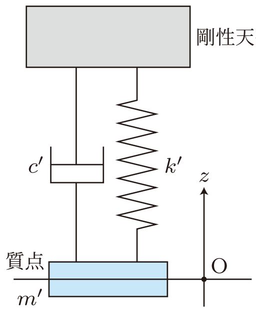

図 1

ここで、z は、物体の静止の位置に原点を有して上に向かう座標である。式 (27) で物体の運動を制止しようとする力は $c'\dot{z}$ である。式 (27) は図 1 の自由振動の運動方程式を示す。この場合、次式で与えられる減衰比 ς

$$\varsigma = \frac{c'}{2m'\sqrt{k'/m'}} \tag{28}$$

の値が正であれば、質点の変位を与える z は時間とともに、減少していく。式 (25) と式 (27) を比較しにくいので、ここでは、$\sin\theta \approx \theta$ と近似できると無理に仮定して次式を考える。

$$\left[m_1 l_1^2 + m_2\,(l_2+u)^2\right]\ddot{\theta} + 2\,m_2(u+l_2)\,\dot{u}\dot{\theta} + \left[m_1 l_1 + m_2(l_2+u)\right]g\,\theta = 0 \tag{29}$$

式 (25) と式 (29) 比較すれば、単振り子の角振動を抑える作用を与える項は、$+2\,m_2(u+l_2)\,\dot{u}\dot{\theta}$ であると推測される。ただし、$0 < 2\,m_2(u+l_2)\,\dot{u}$ となる必要がある。仮に、$2\,m_2(u+l_2)\,\dot{u} < 0$ となった場合は、θ は発散する。機構的に $u < l_2$ となるので、実質的には、$\dot{u}$ の値が負になった場合は、θ は発散するが、いつも $\dot{u}$ の値が負になるとは限らない。実際の挙動を解明するためには、初期条件を与えて、式 (25) と式 (26) を連立させて数値的に解いて吟味する必要がある。$+2m_2(u+l_2)\,\dot{u}\dot{\theta}$ は力ではなく、角振動を抑えるように作用するトルクとなる。繰り返しになるが、式 (25) と式 (26) は、形がやや複雑な連立微分方程式になっているので、振り子の角変位 θ と動吸振器の半径方向変位 u の挙動を求めるためには、初期条件を適切に与えて差分法を用いて数値的に解く必要がある。

（4）　式 (26) を再記して、式 (30) とする。

$$m_2\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u - m_2(u + l_2)\,\dot{\theta}^2 + m_2 g(1 - \cos\theta) = 0 \tag{30}$$

角変位 θ は較的小さいと仮定すると次式が成立する。

$$\cos\theta \approx 1 \tag{31}$$

単振り子の角変位 θ を次式で与える。

$$\theta = A\sin\Omega t \tag{32}$$

式 (32) を式 (30) に代入する。

$$m_2\ddot{u} + c\,\dot{u} + k\,u = m_2(u + l_2)\,A^2\Omega^2\cos^2\Omega t \tag{33}$$

式 (33) において、u は l_2 に比較して小さく、c も小さいと仮定すれば次式となる。

$$m_2\ddot{u} + k\,u = m_2 l_2 A^2\Omega^2\cos^2\Omega t \tag{34}$$

次式を用いて、式 (34) を変形していく。

$$\cos^2\Omega t = \frac{1}{2}\,(\cos 2\Omega t + 1) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} m_2\ddot{u} + k\,u &= m_2 l_2 A^2\Omega^2 \times \frac{1}{2}\,(\cos 2\Omega t + 1) \\ \therefore\quad \ddot{u} + \frac{k}{m_2}\,u &= \frac{1}{2}\,l_2 A^2\Omega^2\cos 2\Omega t + \frac{1}{2}\,l_2 A^2\Omega^2 \end{aligned} \tag{36}$$

式 (36) の解は、次の 3 個の式を満たす解を重ね合わせて得られる。

$$\ddot{u} + \frac{k}{m_2}\,u = \frac{1}{2}\,A^2 l_2\Omega^2\cos 2\Omega t \tag{37}$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m_2}\,u = \frac{1}{2}\,A^2 l_2\Omega^2 \tag{38}$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m_2}\,u = 0 \tag{39}$$

式 (37)、式 (38)、式 (39) の式で、変位 u が増大する解は、式 (37) に起因する。式 (37) の解を次式で仮定する。