問題 2.1　オリジナル

□□□ ← Check!!

図 1 に示すように、長さ l、断面積 A、密度 ρ の棒 OB が点 O 周りに回転できるように剛性壁に取り付けられている。点 O から距離 $l/2$ の棒の点 A には、ばね定数 k のばねが取り付けられていている。この系の自由振動の周期は T_n となった。

この棒の左端 B に図 2 に示すような減衰係数 c のダッシュポットを取り付けたら、自由振動の周期は T_d となった。ダッシュポットの減衰係数 c を ρ, A, l, T_d, T_n で与えなさい。ただし、棒の図心を連ねた線分 OB は水平になっている。

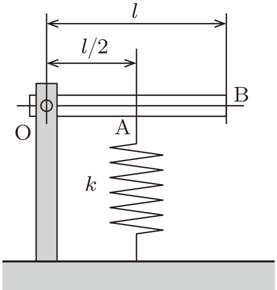

図 1

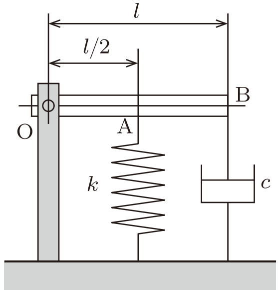

図 2

解

図 1 の系の固有角振動数 ω_n と図 2 の減衰固有角振動数 ω_d を求めるためには、両者の角運動方程式を求める必要がある。このために、棒 OB の点 O 周りの慣性モーメント J_{O} を求める。図 3 に示すように、点 O に原点を有して右に向かう x 座標を採用する。

座標値 x の位置に x の微小な増分 $\mathrm{d}x$ を考えれば、この微小部分の体積は $A \times \mathrm{d}x$ となるので慣性モーメント J は次式で与えられる。

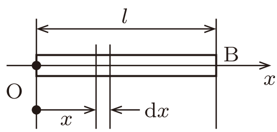

図 3

$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{O}} &= \int x^2\,\mathrm{d}m = \int x^2\rho\,\mathrm{d}v = \rho A\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho A}{3}\left[x^3\right]_0^l = \frac{\rho A l^3}{3}
\end{aligned} \tag{1}
$$

図 1 の角運動方程式を求める。図 4 に示すように棒 OAB が θ だけ角変位して OA′B′ になったとする。

θ の絶対値は小さいと仮定すれば、図 4 に示すように線分 $\overline{\mathrm{AA'}}$ と線分 $\overline{\mathrm{BB'}}$ は次式となる。

$$
\overline{\mathrm{AA'}} = \frac{l}{2}\theta, \qquad \overline{\mathrm{BB'}} = l\theta \tag{2}
$$

ゆえに、点 A′ には下向きに $k(l\theta/2)$ の力が働く。そこで、角運動方程式は次式となる。

$$
\begin{aligned}
-J_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} - k\frac{l\theta}{2}\frac{l}{2} &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{4J_{\mathrm{O}}}\theta &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{4\rho A l^3/3}\theta &= 0 \\
\therefore\quad \ddot{\theta} + \left(\sqrt{\frac{3k}{4\rho A l}}\right)^2\theta &= 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

式 (3) から非減衰固有角振動数 ω_n は次式となる。

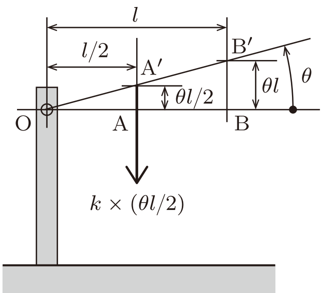

図 4

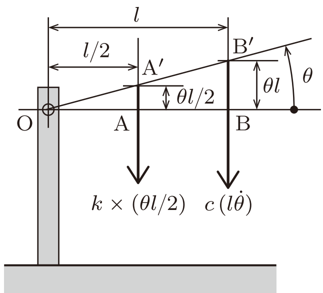

図 5

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{4\rho Al}} \tag{4}$$

次に、図 2 の系の棒 OAB が θ だけ角変位して $\mathrm{OA'B'}$ になったとして、棒に働く力を描けば図 5 となる。

そこで、図 2 の系の角運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
-J_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} - k\frac{l\theta}{2}\frac{l}{2} - (cl\dot{\theta})l = 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{J_{\mathrm{O}}}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{4J_{\mathrm{O}}}\theta = 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{\rho Al^3/3}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{4\rho Al^3/3}\theta = 0 \\
\therefore \quad \ddot{\theta} + 2\left(\frac{3c}{2\rho Al}\right)\dot{\theta} + \left(\sqrt{\frac{3k}{4\rho Al}}\right)^2\theta = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) から減衰固有振動数 ω_d は次式となる。

$$\omega_d = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3k}{4\rho Al}}\right)^2 - \left(\frac{3c}{2\rho Al}\right)^2} \tag{6}$$

図 1 の系の周期 T_n と ω_n の関係式から次式を得る。

$$\begin{aligned}
T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{3k}{4\rho Al}}} \\
\therefore \quad \sqrt{\frac{3k}{4\rho Al}} = \frac{2\pi}{T_n}
\end{aligned} \tag{7}$$

図 2 の系の周期 T_d は次式となる。

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{3k}{4\rho Al}}\right)^2 - \left(\dfrac{3c}{2\rho Al}\right)^2}} \tag{8}$$

式 (8) に式 (7) を代入して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
T_d &= \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\dfrac{2\pi}{T_n}\right)^2 - \left(\dfrac{3c}{2\rho Al}\right)^2}} \\
T_d^2 &= \frac{4\pi^2}{\left(\dfrac{2\pi}{T_n}\right)^2 - \left(\dfrac{3c}{2\rho Al}\right)^2} \\
&= \frac{4\pi^2}{\dfrac{4\pi^2}{T_n^2} - \dfrac{9c^2}{4\rho^2 A^2 l^2}} \\
4\pi^2 &= T_d^2 \left(\frac{4\pi^2}{T_n^2} - \frac{9c^2}{4\rho^2 A^2 l^2}\right) \\
&= \frac{4\pi^2}{T_n^2} T_d^2 - \frac{9c^2}{4\rho^2 A^2 l^2} T_d^2 \\
\frac{4\pi^2}{T_n^2} T_d^2 - 4\pi^2 &= \frac{9c^2}{4\rho^2 A^2 l^2} T_d^2 \\
4\pi^2 \left(\frac{T_d^2 - T_n^2}{T_n^2}\right) &= \frac{9c^2 T_d^2}{4\rho^2 A^2 l^2} \\
c^2 &= \frac{4\pi^2 \times 4\rho^2 A^2 l^2}{9T_d^2} \left(\frac{T_d^2 - T_n^2}{T_n^2}\right) \\
c &= \frac{4\pi\rho Al}{3T_d T_n} \sqrt{T_d^2 - T_n^2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$